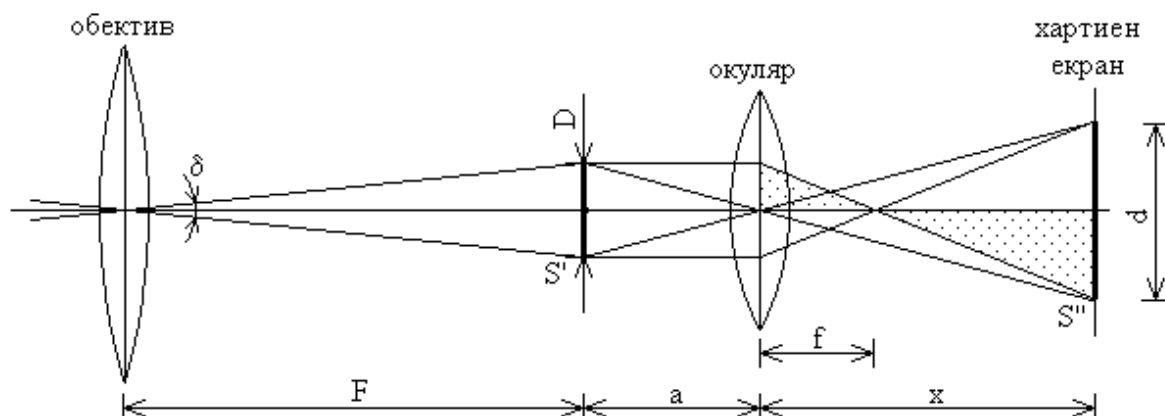


**III кръг на IV национална олимпиада по астрономия, април 2001 г.
УЧЕНИЦИ XI ÷ XII КЛАС**

Задача 1. Наблюдаваме Слънцето, проектирано върху хартиен екран, с помощта на телескоп рефрактор. Първо получаваме фокусирано изображение на Слънцето с диаметър d_1 на разстояние x_1 от окуляра. След това получаваме фокусирано изображение на Слънцето с диаметър d_2 на разстояние x_2 от окуляра. Ако на същия телескоп поставим тъмен филтър и погледнем към Слънцето направо през окуляра, с какво увеличение ще наблюдаваме Слънцето?

Решение. Нека за определеност считаме, че телескопът се състои от две двойно изпъкнали лещи.



С помощта на обектива се получава образът на Слънцето S' , който е разположен във фокалната повърхност на обектива. С помощта на окуляра върху хартиения екран се получава образът S'' на образа S' . Фокусното разстояние на обектива е F . Тъй като видимият ъглов диаметър на Слънцето δ е малък, то за линейния размер D на изображението S' можем да напишем:

$$D = F\delta \quad (1)$$

където δ е в радиани. Означаваме с a разстоянието от S' до окуляра и с f фокусното разстояние на окуляра. Използваме добре известната формула:

$$1/a + 1/x = 1/f \quad (2)$$

също както и формулата за увеличението на окуляра:

$$a/x = D/d \quad (3)$$

Двата случая в задачата се получават, като окулярът се наглася на две различни разстояния a_1 и a_2 от S' (т.е. от фокуса на обектива), и съответно образът S'' се получава на две различни разстояния x_1 и x_2 от окуляра, където и трябва да се постави хартиеният екран, и има два различни диаметъра d_1 и d_2 . От формула (2), записана за двата случая в задачата, получаваме:

$$a_1 = x_1 f / (x_1 - f) \quad (4)$$

$$a_2 = x_2 f / (x_2 - f)$$

$$a_1 / a_2 = (x_1 / x_2) ((x_2 - f) / (x_1 - f)) \quad (5)$$

От формула (3), записана за двата случая, следва:

$$a_1 / a_2 = (x_1 / x_2) (d_2 / d_1) \quad (6)$$

Обединявайки (5) и (6), получаваме:

$$f = (d_1 x_2 - d_2 x_1) / (d_1 - d_2) \quad (7)$$

От (3) и (4) пресмятаме:

$$D = (d_1 x_2 - d_2 x_1) / (x_1 - x_2)$$

откъдето като използваме (1), намираме:

$$F = (1 / \delta)(d_1 x_2 - d_2 x_1) / (x_1 - x_2) \quad (8)$$

При пряко наблюдение на Слънцето през окуляра на телескопа, за да видим фокусирано изображение на Слънцето, трябва да изместим окуляра така, че неговият фокус да съвпадне с фокуса на обектива. Тогава увеличението, с което наблюдаваме Слънцето, е:

$$W = F / f$$

Използваме получените стойности за фокусните разстояния на окуляра и обектива от (7) и (8) и изчисляваме окончателно:

$$W = (1 / \delta)(d_1 - d_2) / (x_1 - x_2)$$

Същия резултат можем да получим дори и по по-кратък път, ако използваме следните съотношения, произтичащи от подобие на двата заштриховани триъгълници на чертежа:

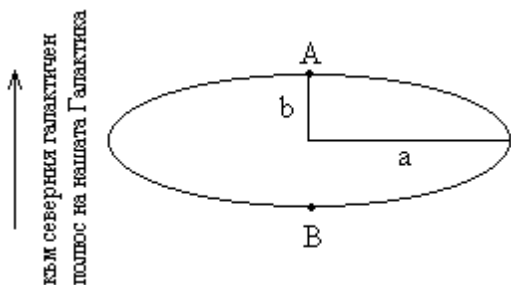
$$d_1 / 2(x_1 - f) = D / 2f$$

$$d_2 / 2(x_2 - f) = D / 2f$$

заедно с равенството (1).

**III кръг на IV национална олимпиада по астрономия, април 2001 г.
УЧЕНИЦИ XI ÷ XII КЛАС**

Задача 2.



Мъглявината в Андромеда, или M31, е единствената видима с просто око галактика на северното небе. За наблюдател, намиращ се в M31, дискът на нашата Галактика ще изглежда като светло петно с елиптична форма.

- Оценете отношението $k = b / a$ на малката и голямата полуоси на тази елипса.
- Коя точка от нашата Галактика се намира по-близо до наблюдателя в M31 – A или B?
- В каква посока от негова гледна точка се върти нашата Галактика – по часовниковата стрелка или обратно?
- Къде приблизително се намира Слънцето – прерисувайте чертежа и означете положението на Слънцето с точка.

Обяснете своите отговори.

Координатите на апекса на Слънчевата система са $\alpha \approx 18^h$, $\delta \approx +30^\circ$. Галактичните полюси са точките, в които оста на нашата Галактика пресича небесната сфера. Северният галактичен полюс се намира в северната небесна полусфера.

Решение. Нашата Галактика представлява огромна звездна система с форма на диск. Слънцето се намира в Галактиката близо до средната равнина на този диск. Ние наблюдаваме това гигантско дискообразно струпване на звезди, намирайки се вътре в него. Когато гледаме по направление на равнината на диска, виждаме светла ивица от гъсто разположени звезди, която опасва цялата небесна сфера – Млечния път. Както може приблизително да се прецени от звездната карта, M31 е на около 20° от централната линия на Млечния път, или все едно – на 20° от равнината на диска на нашата Галактика. За наблюдател от M31 нашата Галактика ще изглежда като петно с форма на елипса, която представлява проекция на кръглият галактичен диск върху небесната сфера. Дискът на нашата Галактика е наклонен на 20° спрямо зрителния лъч от наблюдателя в M31 към нас. Това означава, че ако голямата полуос на елипсата е a , то малката ще бъде:

$$b = a \sin 20^\circ$$

или търсеното съотношение е:

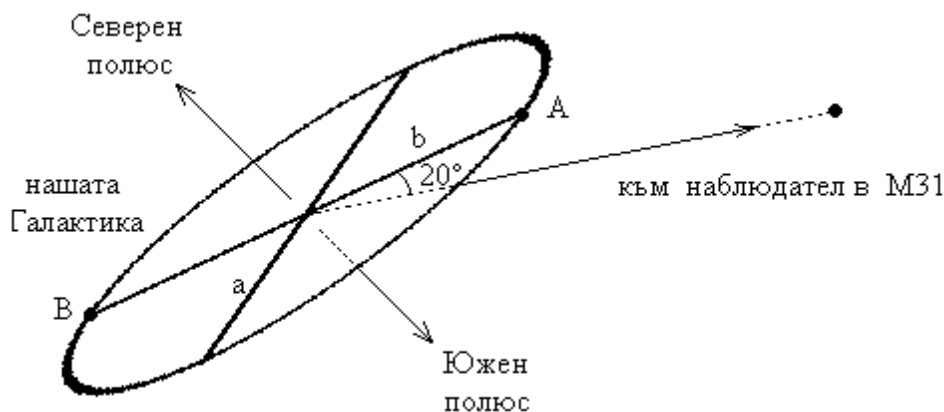
$$k = b / a = \sin 20^\circ$$

$$k \approx 0.34$$

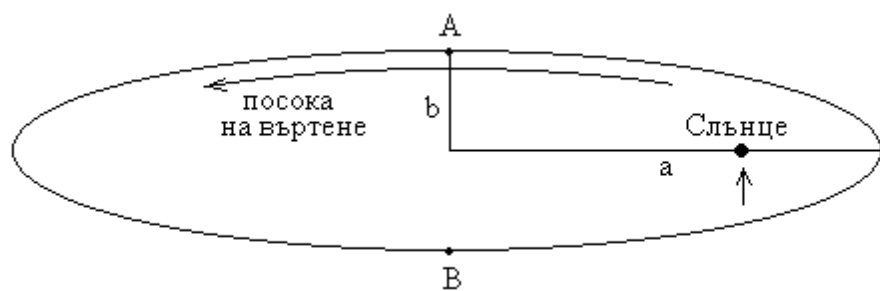
От звездната карта се вижда, че Млечният път представлява ивица, близка до голям кръг от небесната сфера. Можем да кажем, че тя разделя небесната сфера на две части – северна и южна галактична полусфера. В центровете на тези две полусфери се намират двата галактични полюси. Северният галактичен полюс е в северната небесна полусфера (тук имаме предвид полусферата, ограничена от небесния екватор, а не от Млечния път). Следователно той е в онази от галактичните полусфери, в която се намира северният небесен полюс, използван при екваториалната координатна система. Това означава, че M31 за нас се намира в южната галактична полусфера, или M31 е от южната страна спрямо

равнината на диска на нашата Галактика. Наблюдателят в М31 вижда южния полюс на нашата Галактика. Дискът на нашата Галактика е ориентиран така, че точка А от чертежа е по-близо до този наблюдател от точка В.

Апексът на Слънцето е точка от небесната сфера, обозначаваща посоката, в която става движението на Слънцето в Галактиката. От дадените координати виждаме, че тя се намира някъде на границата между съзвездията Лира и Херкулес. Центърът на нашата Галактика е в посока към съзвездието Стрелец. Да си представим въображаем наблюдател, който е "стъпил" върху галактичния диск, там където е Слънцето, и стои изправен откъм северната страна диска (северният галактичен полюс му е "над главата"). При движението на този наблюдател заедно със Слънцето центърът на Галактиката ще му остава отдясно и значи за него въртенето на Галактиката ще става по посока на часовниковата стрелка. Наблюдателят в М31, обаче вижда галактичния диск откъм южната, или в случая "долната" му страна. Следователно а него въртенето на нашата Галактика ще става в посока обратна на часовниковата стрелка.



Ние виждаме М31 приблизително на 90° от Стрелец, т.е. от центъра на Галактиката. Следователно посоката от нас към М31 е приблизително перпендикулярна на посоката от нас към центъра на нашата Галактика. Понеже дискът на нашата Галактика е наклонен само на 20° спрямо посоката към М31, можем да считаме, че за наблюдателя в М31 Слънцето се намира близо до голямата ос на елипсата, в която се проектира за него нашата Галактика. Ако си представим и наблюдателя в М31 обърнат кам нас и изправен в същата посока (краката му са на юг спрямо равнината на нашата Галактика, а главата на север), то той ще вижда Слънцето вдясно от центъра на Галактиката. Тъй като разстоянието на Слънцето от центъра на Галактиката е около $2/3$ от нейния радиус, то можем да отбележим видимото от М31 положение на Слънцето като точка, намираща се върху голямата ос на елипсата, вдясно от галактичния център и на разстояние $2a/3$ от него.



УЧЕНИЦИ XI ÷ XII КЛАС

Задача 3. Вероятно сте наблюдавали как около новолуние освен тънкия светещ сърп на Луната, се вижда и слабо сияние на "тъмната", неосветената от Слънцето страна на Луната, която е обърната към Земята (пепелна светлина).

* Оценете колко пъти видимият блясък на Луната в пълнолуние е по-силен от пепелната светлина на Луната в новолуние.

* Звездната величина на Луната в пълнолуние е $-12^m.7$. Каква е звездната величина на Луната в новолуние?

Забележка: Известно е, че дори във фаза новолуние Луната в повечето случаи изглежда като много тънък сърп, защото поради наклона на лунната орбита към еклиптиката, Луната в новолуние не се намира точно на правата, свързваща Земята и Слънцето. При тази задача светенето на тънкия сърп на Луната в новолуние да не се разглежда и размерите му в сравнение с тези на "тъмната" част от Луната да се пренебрегнат.

Решение. В пълнолуние Луната свети с отразена от Слънцето светлина. Пепелната светлина, с която свети "тъмната", неосветена от Слънцето страна на Луната в новолуние и други фази, е отразена от Луната земена светлина. Приемаме, че Луната отразява слънчевата (а също и земната) светлина като диск с радиус R_L , равен на радиуса на Луната, и поради това, че повърхността ѝ не е огледално гладка, я разсейва във всички посоки. Аналогично условие приемаме и за отразяването и разсейването на слънчевата светлина от Земята, чийто радиус е R_Z . Означаваме с r_C разстоянието от Земята до Слънцето, а с r_L разстоянието от Земята до Луната. Светимостта на Слънцето е L_C . Средната осветеност на повърхността на лунния диск от Слънцето в пълнолуние е пропорционална на L_C / r_C^2 . Следователно ако площта на видимия лунен диск е S_L , а албедото на Луната е A_L , то общото излъчване на видимия лунен диск в пълнолуние е:

$$W_{LP} \sim (L_C / r_C^2) A_L S_L$$

При новолуние към Луната е обърната изцяло осветената от Слънцето страна на Земята. Общото излъчване на видимия от Луната земен диск е:

$$W_Z \sim (L_C / r_C^2) A_Z \pi R_Z^2$$

където A_Z е албедото на Земята, а πR_Z^2 е площта на видимия земен диск. Средната осветеност на повърхността на Луната от Земята в този случай е пропорционална на W_Z / r_L^2 и общото излъчване на Луната в новолуние е:

$$W_{LN} \sim (W_Z / r_L^2) A_L S_L$$

Отношението на общото излъчване на Луната в пълнолуние към това в новолуние е:

$$W_{LP} / W_{LN} = ((L_C / r_C^2) A_L S_L) / ((W_Z / r_L^2) A_L S_L)$$

$$W_{LP} / W_{LN} = (L_C / r_C^2) / (((L_C / r_C^2) A_Z \pi R_Z^2) / r_L^2)$$

$$W_{LP} / W_{LN} = r_L^2 / A_Z \pi R_Z^2$$

Използвайки стойностите за A_Z и R_Z от таблиците с данните за планетите, получаваме:

$$W_{LP} / W_{LN} \approx 3000$$

Тъй като разстоянието от Земята до Луната е едно и също, отношението на осветеностите, които Луната създава на Земята в пълнолуние и в новолуние, е равно на отношението на общото излъчване на Луната при пълнолуние и в новолуние. Следователно видимият блясък на Луната в пълнолуние е около 3000 пъти по-силен от блясъка ѝ в новолуние.

Нека $m = -12^{\text{m}}.7$ и m_1 са звездните величини на Луната съответно в пълнолуние и в новолуние. Използваме формулата на Погсон:

$$\lg (W_{\text{лп}} / W_{\text{лн}}) = 0.4 (m_1 - m)$$

$$m_1 = m + 2.5 \lg (W_{\text{лп}} / W_{\text{лн}})$$

$$m_1 \approx -4^{\text{m}}.0$$

III кръг на IV национална олимпиада по астрономия, април 2001 г.

УЧЕНИЦИ XI ÷ XII КЛАС

Задача 4. Една от най-близките до нас звезди е т.нар. летяща звезда на Барнард. Пространствената ѝ скорост е $v_1 = 400 \text{ km/s}$. Предполага се, че звездата е придобила такава висока скорост, тъй като някога е влизала в

състава на тясна двойна система, чиято друга, по-масивна компонента е избухнала.

- Приемаме, че масата на звездата на Барнард е $M_1 = 1 M_{\odot}$, а масата на другата звезда преди взрива е била $M_2 = 10 M_{\odot}$. След взрива масата на остатъка от избухналата звезда е $M_3 \ll M_{\odot}$. Намерете разстоянието между двете звезди преди взрива. Считайте, че преди взрива двете звезди са се движили по кръгови орбити една около друга.

- Ако масата на остатъка е $M_3 = 1 M_{\odot}$, то какви биха били пространствените скорости на звездата на Барнард и остатъка от масивната звезда след раздалечаването им?

Решение. Нека r_1 и r_2 са радиусите на орбитите на двете звезди преди взрива спрямо общия център на масите. Разстоянието между звездите във всеки момент е $a = r_1 + r_2$. В сила е следното съотношение:

$$r_1 / r_2 = M_2 / M_1 \quad (1)$$

Ако T е орбиталният период на движение на звездите, то:

$$T = 2 \pi r_1 / v_1 \quad (2)$$

Съгласно третият закон на Кеплер:

$$(r_1 + r_2)^3 / T^2 = G (M_1 + M_2) / 4\pi^2$$

където G е гравитационната константа.

Оттук използвайки (1) и (2) получаваме:

$$r_1 = G M_2 / v_1^2 (1 + M_1 / M_2)^2 \quad (3)$$

Разстоянието между звездите преди взрива е:

$$a = r_1 + r_2 = r_1 (1 + M_1 / M_2) = G M_2 / v_1^2 (1 + M_1 / M_2) \quad (4)$$

$$a = G \cdot 10 M_{\odot} / (v_1^2 (11/10)) \approx 7.5 \cdot 10^6 \text{ km}$$

Нека преди взрива разстоянието между звездите е $a = 7.5 \cdot 10^6 \text{ km}$. По-леката звезда има скорост $v_1 = 400 \text{ km/s}$, а по-тежката $v_2 = v_1 M_1 / M_2 = 40 \text{ km/s}$. След взрива остатъкът от избухналата звезда има маса $M_3 = M_1 = 1 M_{\odot}$. Непосредствено след взрива неизбухналата звезда има скорост v_1 , а остатъкът от избухналата звезда – v_2 , но те вече не се движат по кръгови орбити около центъра на масите, защото поради намалялата маса на избухналата звезда, се привличат много по-слабо и системата се разпада. След като се разлетят на голямо разстояние, скоростите на звездата и на остатъка от избухналата звезда стават съответно v_1' и v_2' . Това са пространствените скорости, които търсим.

Скоростите на звездите v_1, v_2, v_1' и v_2' са относно координатна система, в която центърът на масите на системата преди взрива е неподвижен. След взрива на едната звезда, обаче, голяма част от нейната маса се превръща в бързо

разширяваща се мъглявина, в средата на която остават едната звезда и остатъкът от другата. Гравитационното въздействие на тази мъглявина върху тях е нулево. Центърът на масите на новата система от две тела вече не е неподвижен относно координатната система, в която центърът на масите преди взрива е бил неподвижен. Скоростта на новия център на масите относно стария е: $v_C = (v_1 - v_2) / 2$. Скоростите на звездата и остатъка относно новия център на масите непосредствено след взрива са: $v_{1C} = v_{2C} = (v_1 + v_2) / 2$, ($v_{1C} = v_1 - v_C$; $v_{2C} = v_C + v_2$).

Записваме закона на запазване на енергията в координатната система, свързана с новия център на масите:

$$M_{\odot} v_{1C}^2 / 2 + M_{\odot} v_{2C}^2 / 2 - G M_{\odot}^2 / a = M_{\odot} v'_{1C}{}^2 / 2 + M_{\odot} v'_{2C}{}^2 / 2$$

където v'_{1C} и v'_{2C} са скоростите на звездата и остатъка в новата координатна система, след като се отдалечат на голямо разстояние (или в безкрайност). Тъй като $v_{1C} = v_{2C}$ и $M_3 = M_1 (= M_{\odot})$ то $v'_{1C} = v'_{2C}$.

Оттук получаваме:

$$v_{1C}^2 - G M_{\odot} / a = v'_{1C}{}^2$$

$$v'_{1C} = ((v_1 + v_2)^2 / 4 - G M_{\odot} / a)^{1/2}$$

$$v'_{1C} = 175 \text{ km/s}$$

За да намерим пространствените скорости, трябва да преминем в първоначалната координатна система: $v_1' = v_C + v'_{1C}$ и $v_2' = v_C - v'_{1C}$. Тъй като $v_C = (v_1 - v_2) / 2$, то за пространствените скорости получаваме:

$$v_1' = (v_1 - v_2) / 2 + ((v_1 + v_2)^2 / 4 - G M_{\odot} / a)^{1/2} = 355 \text{ km/s}$$

$$v_2' = (v_1 - v_2) / 2 - ((v_1 + v_2)^2 / 4 - G M_{\odot} / a)^{1/2} = 5 \text{ km/s}$$

III кръг на IV национална олимпиада по астрономия, април 2001 г. УЧЕНИЦИ XI ÷ XII КЛАС

Практическа задача. В телескоп е наблюдавана визуално двойна звезда. От наблюденията е пресметнато, че едната звезда е два пъти по-лека от другата. На фиг.1 е показана видимата орбита на по-леката звезда около общия център на масите.

* Постройте върху нея орбитата на по-тежката компонента.

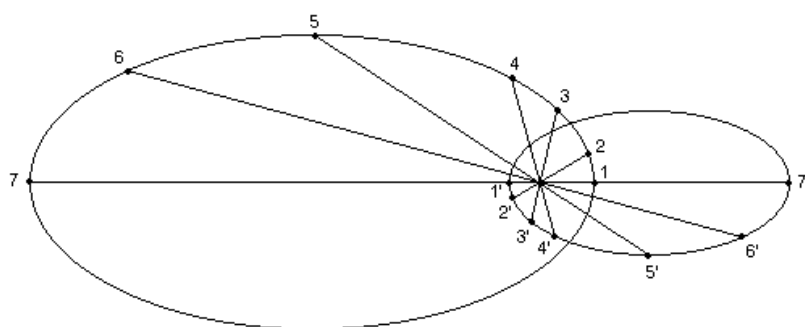
При провеждане на спектрални наблюдения се оказало, че по-тежката от двете звезди от своя страна е тясна двойна система, в която едната компонента е три пъти по-лека от другата. На фиг.2 е показана кривата на лъчевите скорости на по-леката звезда, получена по отместване на линиите в спектъра на звездата вследствие на ефекта на Доплер.

* Нарисувайте приблизително как изглежда орбитата на тази звезда и означете характерните точки – **a**, **b**, **c**, **d** – съответстващи на означените със същите букви точки върху кривата на лъчевите скорости. Как е ориентирана тя спрямо зрителния лъч?

* Нарисувайте върху графиката кривата на лъчевите скорости на по-тежката компонента.

Приемете, че зрителният лъч лежи в орбиталната равнина на тясната двойна система.

Решение. От определението за център на масите следва, че разстоянията до него са обратно пропорционални на масите на компонентите на двойната звезда. От съображение за подобие, както и поради малките ъглови размери на кратните звездни системи, следва, че това е вярно и за видимите ъглови разстояния на двете звезди до центъра на масите. Тъй като двете звезди и центърът на масите винаги лежат на една права, то на всяка точка от орбитата на по-леката звезда еднозначно съответства точка от орбитата на по-тежката звезда. Избираме една точка от дадената орбита и построяваме отсечка от избраната точка до центъра на масите, след което я продължаваме с половин дължина. Крайната точка на така получената отсечка е точка от орбитата на по-тежката звезда. Като повторим тази процедура за голям брой различни точки, разпределени по



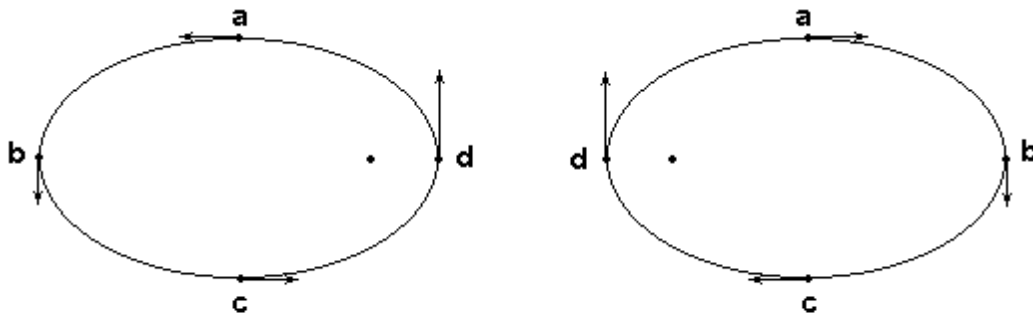
фиг.1

орбитата на едната компонента, можем да получим доста-тъчен брой точки от орбитата на другата компонента и с добра точност да възстановим нейната орбита (фиг. 1).

• Тъй като кривата на лъчевите скорости не е синусоида, то орбитата не е кръгова, а е елипса. Кривата не е симетрична и следователно орбитата не е ориентирана с голямата си ос успоредно на зрителния лъч. Освен това забелязваме, че всеки един от двата участъка на кривата (под и над абсцисата) е симетричен, т.е. **ab** е симетрично на **bc** и **cd** е симетрично на **da**. Следователно голямата ос на орбитата е стриктно перпендикулярна на зрителния лъч. Точките **a** и **c** имат лъчеви скорости $V_R = 0$ и следователно съответстват на точки, в които звездата се движи перпендикулярно на зрителния лъч. В точка **b** лъчевата скорост има максимална отрицателна големина и следователно съответства на точка от орбитата, в която звездата се движи право

към нас. Аналогично точка **d** съответства на точка от орбитата, в която звездата се отдалечава от нас право по зрителния лъч. При това там скоростта е максимална, от което следва, че в точка **d** звездата е в периастрий.

Следователно орбитата ще изглежда така (фиг. 2) :



фиг.2

Възможните орбити са две, поради двете възможни посоки на обикаляне по орбитата.

• Тъй като двойната звезда можем да приемем за затворена механична система, за нея можем да запишем закона за запазване на импулса. Ако работим в координатна система, свързана с центъра на масите, то:

$$M_1 \mathbf{v}_1 + M_2 \mathbf{v}_2 = 0$$

Където $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$ са пространствените скорости на звездите и са векторни величини.

Следователно:

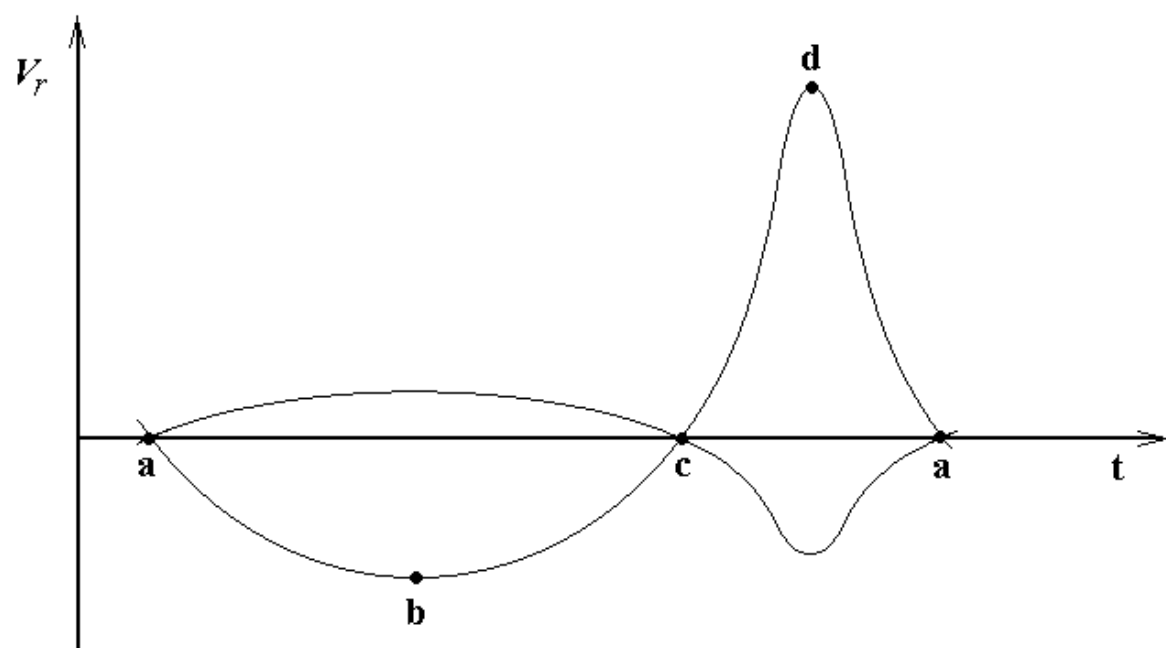
$$M_1 \mathbf{v}_1 = -M_2 \mathbf{v}_2$$

От тук следва, че скоростите на звездите са успоредни по направление и противоположни по посока. За абсолютните стойности на скоростите можем да запишем:

$$v_1 / v_2 = M_2 / M_1$$

т.е. те са обратно пропорционални на масите на звездите.

От елементарни геометрични съображения е ясно, че тези разсъждения са верни и за лъчевите скорости на звездите. Следователно лъчевата скорост на по-тежката компонента във всеки момент от време ще бъде обратна по посока и три пъти по-малка по големина от лъчевата скорост на леката компонента (фиг. 3).



фиг.3